Persistenter Identifier:	1544524068118
Titel:	Taschenbuch der practischen Geometrie
Autor:	Bilfinger, Paul
Ort:	Stuttgart
Maße:	XV, 315 Seiten
Datierung:	1879
Signatur:	1M 453(2)
Strukturtyp:	monograph
Lizenz:	https://creativecommons.org/licenses/by-sa/4.0/
PURL:	https://digibus.ub.uni-stuttgart.de/viewer/image/1544524068118/1/

Abschnitt:	Berechnung und Theilung von Flächen
Strukturtyp:	chapter
Lizenz:	https://creativecommons.org/licenses/by-sa/4.0/
PURL:	https://digibus.ub.uni-stuttgart.de/viewer/image/1544524068118/32/LOG_0006/

Capitel II.

Berechnung und Theilung der Flächen.

§1. Bestimmung des Inhalts der Fl

a. durch Längenmessung nach Cap. I
der Inhalt der einzelnen Dreiecke ist

$$\Delta = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} \quad \text{wo}$$
$$s = \frac{a+b+c}{2}$$

b. Mit Coordinatenmessung nach
§ 6 b.

Eine mittelst Coordinaten aufgenommene Fläche kann unmittelbar aus dem Grundriß durch Bestimmung der einzelnen wirklichen Dreiecke u. Trapeze, in welche sie durch die Aufnahmslinien u. die Coordinaten zerlegt wird, berechnet werden.
Aus der Figur ergibt sich, ob ein Flächentheil positiv oder negativ zu nehmen ist.

Sind die Coordinaten der Ecken (1, … $k-1, k \,..\, n$) einer Figur nach Größe u. Vorzeichen in Zahlen gegeben, so rechne man nach einer der folgenden allgemeinen Formeln.

1. $$2F = x_1(y_2 - y_n) + x_2(y_3 - y_1) + \ldots x_{n-1}(y_n - y_{n-2}) + x_n(y_1 - y_{n-1})$$
$$= \sum_{k=1}^{k=n} x_k (y_{k+1} - y_{k-1}) \quad \text{I. oder}$$

$$2F = \sum_{k=1}^{k=n} y_k (x_{k-1} - x_{k+1})$$

$$2F = (x_2+x_1)(y_2-y_1) + (x_3+x_2)(y_3-y_2) \dots$$
$$+ (x_n + x_{n-1})(y_n - y_{n-1}) + (x_1 + x_n)(y_1 - y_n)$$
$$= \sum_{k=1}^{k=n} (x_{k+1} + x_k)(y_{k+1} - y_k) \quad \text{oder}$$
$$2F = \sum_{k=1}^{k=n} (y_{k+1} + y_k)(x_{k+1} - x_k) \Bigg\} \text{II.}$$

Beispiel mit Doppelrechnung.

…ben die Coordinaten der Punkte.

1) $x_1 = -879,24$ $y_1 = +2458,46$
2) $x_2 = -921,60$ $y_2 = +2498,64$
3) $x_3 = -1182,46$ $y_3 = +2667,82$
4) $x_4 = -1139,62$ $y_4 = +2862,80$
5) $x_5 = -841,50$ $y_5 = +2911,52$
6) $x_6 = -793,16$ $y_6 = +2640,18$

Flächenberechnung.

$x_k(y_{k+1}-y_{k-1})$ +	−	$y_{k+1}-y_{k-1}$	x_k	y_k	$x_{k+1}-x_{k-1}$	$y_k(x_{k+1}-x_{k-1})$ +	−
			−800	+2460			
			−79,24	−1,54			
	25458,2	+209,36	−121,60	+38,64	−303,22		11716,4
	139276,6	+364,16	−382,46	+207,82	−218,02		45308,9
	82765,4	+243,70	−339,62	+402,80	+340,96	137338,7	
238,7		−222,62	−41,50	+451,52	+346,46	156433,6	
	3098,9	−453,06	+6,84	+180,18	−37,74		6800,0
215,6		−141,54	−79,24	−1,54	−128,44	197,8	
			−121,60	+38,64			
454,3	250599,1	0			0	293970,1	63825,3

$2F = 230144,8$ $\qquad$ $2F = 230144,8$

$F = 115072,4$ qm.

…ür die hier vorkommenden auszuführenden

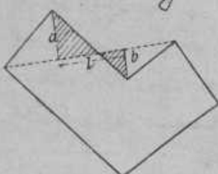
Multiplikationen empfiehlt sich „Crelle Rechentafeln, Berlin 1857", besonders aber die in Cap XVII näher beschriebenen Rechenmaschinen.

c. Nach einem Plan

1. Durch Abgreifen der Maße.

Ein Vieleck wird auf graphischem Wege in ein Dreieck von gleichem Inhalt verwandelt u. letzterer durch Messen der Grundlinie u. Höhe des Dreiecks bestimmt.

Wenn die Verwandlung zu kompliziert wird, zerlegt man das Vieleck in einzelne Dreiecke u. erhält seinen Inhalt durch algebraische Summierung der einzelnen Dreiecksinhalte.



Bei größeren Flächen berechnet man zunächst den Kern der Figur u. dann den Zu- oder Abgang der übrig bleibenden verschränkten Trapeze vom Inhalt

$$f = \frac{h}{2}(a-b)$$ (cfr Fig).

Unregelmäßig begrenzte Flächen (Bäche, Wege, Seen) bestimmt man durch Zerlegen in Streifen, indem man ein Netz von gleich weit entfernten Parallelen auf Pauspapier darüber legt, die mittleren Ordinaten abgreift, mit Zirkel summarisch addiert u. die Summe mit der Breite der Streifen multipliziert. Bei langen und schmalen Streifen (Ackerparzellen) wird die Breite am besten unmittelbar auf dem Felde gemessen u. die Länge aus dem Plan bestimmt, da ein Fehler in der Breite von viel größerem Einfluß auf die Inhaltsbestimmung ist, als ein gleich großer in der Länge.

Eingang des Papiers.

Ist ein Plan in irgend einer Richtung um $p\,\%$ eingegangen, so müssen die in dieser Richtung abgenommenen Maße um $p\,\%$ vermehrt werden.

Ist der Plan in der Richtung eines Randes um $p\,\%$, in der Richtung des andern um $q\,\%$ eingegangen, so ist der prozentische Eingang einer Linie, welche von den Planrändern die Stücke a u. b abschneidet, wenn deren Verhältnis $a : b = n : 1$ ist

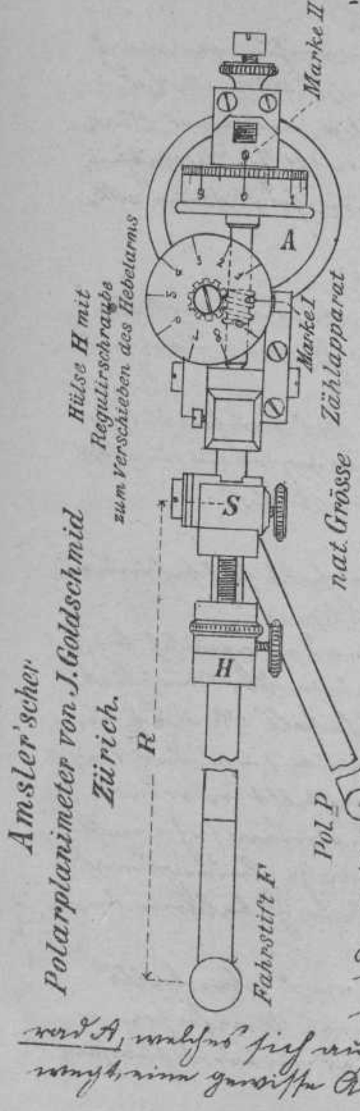
$$p' = \frac{a^2 p + b^2 q}{a^2 + b^2} = \frac{\left(\frac{a}{b}\right)^2 p + q}{\left(\frac{a}{b}\right)^2 + 1} = \frac{n^2 p + q}{n^2 + 1}$$

(Hierbei ist p^2 u. q^2 als verschwindend klein vernachlässigt.)

2. Inhaltsbestimmung mittelst des Planimeters.

Der einfachste Planimeter, der in der Praxis ausschließlich zur Anwendung kommt, ist der von Amsler.

Beschreibung: der „Pol" P desselben wird auf dem Papier mittelst eines



Stiftes befestigt, so daß Endpunkt S des _festen_ Armes PS einen Kreis um ihn beschreiben kann. Der _bewegliche_ Arm SF, welcher in der Hülse H seiner Längsrichtung nach verstellt werden kann, ist in S scharnierartig mit dem festen Arm verbunden. Demnach kann der _Fahrstift F_ jeden Pkt auf dem Papier erreichen, dessen Entfernung von dem Pol annähernd zwischen den Grenzen R'+R u R'-R liegt.

Gebrauch: Zur Flächenermittlung wird mit dem Fahrstift F der Umfang der Figur vollständig umfahren, dabei macht das _Laufrad A_, welches sich auf dem Papier bewegt, eine gewisse Anzahl von Umdrehungen.

Die Anzahl m der ganzen Umdrehungen wird durch ein Zählwerk an der Marke I, der übrigbleibende Bruchtheil μ an einer Marke II gegenüber dem in 100 Theile getheilten Laufrad A abgelesen, so daß die vollständige Ablesung

$$n = m + \mu \text{ ist.}$$

Anm. Häufig ist statt der Marke II ein Nonius angebracht, was übrigens unnöthig erscheint.

Ist u der Umfang des Laufrades, so ist der Inhalt F der Figur, wenn der Pol außerhalb derselben steht:

$$F = R \cdot u \cdot n$$

u. wenn der Pol innerhalb sich befindet:

$$F = R \cdot u \cdot n + C.$$

Der Faktor $R \cdot u$ wird empirisch bestimmt; er kann vermöge der Verschiebbarkeit des Fahrstifthebels R auf eine beliebige Constante (in der Regel $= 1$ oder $= 10$) eingestellt werden. Zu diesem Zweck befinden sich meist für die gebräuchlichen Zeichnungsmaßstäbe an bezüglichen Stellen bezügliche Marken.

Die Constante C wird ebenfalls empirisch, durch öfteres Umfahren einer Figur von bekanntem Flächeninhalte, bestimmt. Da deren Bestimmung aber unsicher u. der bei Innenstellung des Pols zu fürchtende Fehler größer ist als der bei Außenstellung zu fürchtende, so legt man in der Praxis den Pol meist außerhalb der Figur u. theilt lieber größere Figuren in 2 oder mehrere einzelne zu umfahrende Theile. Es ist der mittlere Fehler der Flächenbestimmung mittelst Planimeter bei einem einmaligen Umfahren zu 0,5% bei zweimaligem zu 0,3% anzunehmen. Bei großen Flächenbestimmungen von 400 □cm. u. mehr wird der Fehler erheblich geringer.

<u>Offizielle Bestimmungen über die Differenzen</u>, welche zwei unabhängige Flächenbestimmungen höchstens zeigen dürfen.

Fläche	Differenz 2er unabhängiger Bestimmungen			
	Preußen	Österreich	Württemberg	Baden
1 Ar = 100 qm	qm	qm 0,5	qm 0,25 - 0,75	qm 5
1000 qm	22	5	2,5 - 7,5	10
1 Hektar = 10000	95	50	25 - 75	40
100000	300	500	250 - 750	220

Die Württembergische Bestimmung bezieht sich auf unmittelbare Messung u. richtet sich die zulässige Flächendifferenz nach der jeweiligen Neigung der aufgenommenen Fläche.

Beim Abstechen aus Plänen darf sich die angegebene Differenz verhöhen um $\frac{80}{m\sqrt{F}}$ qm pro 1. H. A., wobei F die Fläche in Hektaren u. $\frac{m}{1000}$ der Maßstab des Planes ist (Min. Verfgg. v. 15 Mai 1874).

§ 2. Theilung der Flächen.

Mit Hilfe folgender zwei Grundaufgaben u. ihrer speciellen Fälle lassen sich alle Theilungsaufgaben lösen.

Grundaufgabe I.

An eine Gerade AB = a sind zwei andere Gerade AM u. BN unter den Winkeln α u. β angelegt. Durch eine zu AB parallel gezogene Gerade CD = x soll ein Stück ABCD vom Inhalt Q abgeschnitten werden.

I^te^ Auflösung durch Rechnung von x u. y. Für numerische Berechnung mit Hilfe von Quadrat- u. Cotangententafeln eignet sich die Form

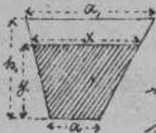
$$x = \sqrt{a^2 - 2Q(ctg\,\alpha + ctg\,\beta)}$$

für logarithmische Berechnung

$$x = \sqrt{a^2 - 2Q\,ctg\,\alpha - 2Q\,ctg\,\beta}$$ u.

$$y = \frac{2Q}{a+x}$$

2. Auflösung (empirisch.)



Man steckt im Abstand

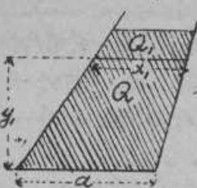
$$h_1 = \frac{2Q}{a}$$

eine Parallele aus, mißt dieselbe $= a_1$, dann wird

$$x = \sqrt{a \cdot a_1}$$

$$y = \frac{2Q}{a+x}$$

3. Auflösung. (Coupirmethode).



Man steckt in der Entfernung $y_1 = \frac{Q}{a}$ eine Parallele aus und mißt sie $= x_1$, dann hat man ein Stück

$$Q_1 = Q - \frac{a+x_1}{2} \cdot \frac{Q}{a}$$

$$= \frac{Q}{2a}(a - x_1)$$

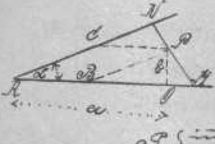
zu viel (oder zu wenig) abgeschnitten; man steckt nun rückwärts (oder vorwärts) eine neue Parallele x_2 im Abstand $y_2 = \frac{Q_1}{x_1}$ von x_1 aus, so hat man jetzt

$$Q_2 = \frac{Q_1}{2x_1}(x_1 - x_2)$$

zu viel, resp. zu wenig. Alsdann wird wieder um $\frac{Q_2}{x_2}$ verbessert u. s. f. bis der Fehler vernachlässigt werden kann.

Grundaufgabe II.

Von einem Winkel $MAN = \alpha$ soll durch eine Gerade MN, welche durch den mittelst der Coordinaten $AO = a$ und $PO = b$ gegebenen Punkt P geht, ein Dreieck AMN von gegebenem Inhalt Q abgeschnitten werden.



Man hat

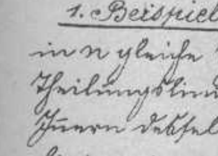
$$AM = \frac{Q}{b} \pm \frac{Q}{b}\sqrt{1 - \frac{2b}{Q}(a - b\,\mathrm{ctg}\,\alpha)}$$

$$AN = \frac{2Q}{AM \sin\alpha}$$

Je nachdem nun $P \begin{Bmatrix} \text{innerhalb} \\ \text{außerhalb} \end{Bmatrix}$ des Winkelraumes α liegt, ist $a - b\,\mathrm{ctg}\,\alpha \gtrless 0$. Im ersten Fall hat man $\begin{Bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix}$ Lösungen, je nachdem $\frac{Q}{2} \begin{Bmatrix} > \\ = \\ < \end{Bmatrix}$ Parallelogramm $ABPC$. ist u. zwar wird die Theillinie parallel BC, wenn nur eine Lösung möglich ist. Im 2ten Fall ist immer eine Lösung möglich.

<u>1. Beispiel</u> I. Ein gegebenes Vieleck soll in n gleiche Theile so getheilt werden, daß die Theilungslinien durch einen Punkt P im Innern desselben gehen u. die erste Theilungslinie eine vorgeschriebene Lage PC erhält.

Auflösung. Man nimmt die erste Theilungslinie PC als Abscissenlinie an u. berechnet den Inhalt F des Vielecks, so ist der Inhalt Q eines Theils



$$Q = \frac{F}{n}$$

Nun berechnet man das, dem Inhalt Q nächst kleinere Vieleck $CDEP = J$ u. erhält demnach den Inhalt des zuzuschlagenden Dreiecks EPM aus

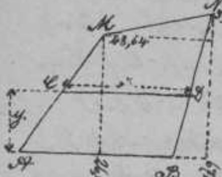
$$\Delta = Q - J = \frac{F}{n} - J$$

Nachdem die Höhe PR gemessen, ergibt sich

$EM = \frac{2\Delta}{PR} = 2\,\frac{\frac{F}{m} - J}{PR}$. Statt EM zu berechnen, kann man auch Punkt M zunächst einschätzen u. EM messen, dann muß $\frac{EM \cdot PR}{2} = \Delta$ sein; wenn nicht, so rückt man M etwas nach rechts oder links; mit 2-3 Versuchen erhält man ein gutes Resultat.

Die Weitertheilung geschieht auf dieselbe Weise.

Beispiel II. Das Viereck $ABNM = J$ durch CD parallel AB zu halbiren (Lösung nach Nro I).



$$2J = 48{,}64 \cdot 26{,}02 + (48{,}64 + 59{,}78)\,40{,}74 - 59{,}78 \cdot 12{,}96$$

$$= 5736{,}85 - 774{,}75$$

$$2J = 4962{,}10 \;\square m.$$

Schema.

Num.	Log.	
$2Q = J = 2481{,}05 \,\square m$	$26{,}02 =$	1.41531
$ctg\,\alpha = \frac{26{,}02}{48{,}64}$	$\ell\, 48{,}64$	8.31301
$ctg\,\beta = -\frac{12{,}96}{59{,}78}$	$2Q$	3.39464
$a = 54{,}30 m$	$12{,}96$	1.11261_n
$a^2 = 2948{,}49$	$\ell\, 59{,}78$	8.22344
$2Q\,ctg\,\alpha = +1327{,}27$	$2Q\,ctg\,\alpha$	3.12296
$2Q\,ctg\,\beta = -537{,}89$	$2Q\,ctg\,\beta$	2.73069_n
$2Q(ctg\,\alpha + ctg\,\beta) = 789{,}38$	x^2	3.33427
$x^2 = 2159{,}11$	x	1.66713
$x = 46{,}47$	$2Q$	3.39464
$a + x = 100{,}77$	$a+x$	2.00333
$y = 24{,}62 m$	y	1.39131

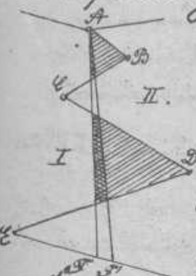
Man steckt nun CD mittelst 2er

Teilstrecken von je = 24,62 m Länge ab. Als Probe muß sich CD = x = 46,47 mtr ergeben.

Beispiel III (Grenzausgleichungsmethode.)

Die gebrochene Linie ABCDE (Grenze) soll in eine durch A gehende Gerade verwandelt werden.

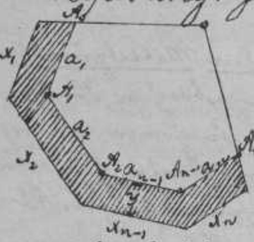
Auflösung. Man kann hier das Verfahren der ebenen Geometrie, nämlich das Verwandeln der Grenze durch Parallelenschieben auf dem Felde nachahmen.



Rascher wird man aber zum Ziele kommen, wenn man zuerst die Grenze AF näherungsweise zieht u. nach der Messung – mit AF als Aufnahmelinie – berechnet, ob die vom Grundstück I abgeschnittenen den von II abgetrennten Flächengrößen (Dreiecke) gleich sind oder nicht. Sind die ersteren zu klein, so rückt man die Grenze etwas gegen II nach AF' vor u. vergleicht die neuen Abschnitte. Mit diesem Vorrücken wird so lange fortgefahren, bis die Flächengrößen gleich sind.

Beispiel IV. Längs des Linienzugs $A_0, A_1, \ldots A_{n-1}, A_n$ der durch die Größe seiner Seiten u. Winkel bestimmt ist, soll ein Streifen von gleicher Breite so angelegt werden, daß derselbe eine Fläche von gegebener Größe Q einnimmt.

Auflösung: Für den Fall, daß der Streifen außerhalb des Zugs angelegt wird, erhalten wir folgende leicht abzuleitende Formeln.



Wenn y die gesuchte Breite des Streifens,
u die Größe des innern } Umfangs bedeutet u.
x " " " äußern }

$s = \operatorname{ctg} A_0 + 2 \operatorname{ctg} \frac{A_1}{2} + 2 \operatorname{ctg} \frac{A_2}{2} + \ldots 2 \operatorname{ctg} \frac{A_{n-1}}{2} + \operatorname{ctg} A_n$

gesetzt wird, so gelten die Gleichungen

$$x = u + sy \text{ od. } x - u = sy \quad (2)$$

$$x + u = \frac{2Q}{y} \quad (3)$$

$$x^2 - u^2 = 2Qs \text{ woraus}$$

$$x = \sqrt{2Qs + u^2} \quad (4)$$

$$y = \frac{2Q}{u + x} \quad (5)$$

Für den andern Fall, daß der Streifen innerhalb des Zugs angelegt wird, d.h. von demselben abgeschnitten werden soll, hat man nur die Bezeichnungen von x u. u zu vertauschen, so daß

$$u = \sqrt{2sQ + x^2}$$

$$y = \frac{2Q}{x + u}.$$