Persistenter Identifier:	1554117854977_J1867
Titel:	Jahres-Bericht der Königl. Polytechnischen Schule zu Stuttgart für das Studienjahr 1867/68
Ort:	Stuttgart
Datierung:	1867
Signatur:	w. G. qt 52
Strukturtyp:	volume
Lizenz:	https://creativecommons.org/licenses/by-sa/4.0/
PURL:	https://digibus.ub.uni-stuttgart.de/viewer/image/1554117854977_J1867/1/

Abschnitt:	Mathematische Gewölbstärke
Strukturtyp:	chapter
Lizenz:	https://creativecommons.org/licenses/by-sa/4.0/
PURL:	https://digibus.ub.uni-stuttgart.de/viewer/image/1554117854977_J1867/7/LOG_0008/

$$ED : h = P_0 : R \cos \alpha.$$

In ganz gleicher Weise erhält man

$$M_1 C : h = P_0 : R_1 \cos \alpha_1.$$

Aus beiden Proportionen ergibt sich die dritte:

$$ED : M_1 C = R_1 \cos \alpha : R \cos \alpha.$$

Man kann also den Punkt E dadurch bestimmen, dass man die Länge ED nach dieser Proportion, nämlich so abträgt, dass sie sich zu $M_1 C$ verhält, umgekehrt wie die betreffenden Verticalkräfte $R_1 \cos \alpha_1$ und $R \cos \alpha$. Nachdem hiedurch die Lage EB der Kraft P gegeben ist, erhält man B als Durchschnittspunkt mit R, und sodann den zu suchenden Punkt M_0 als auf einer Horizontalen liegend mit B.

Sind alle äusseren Kräfte senkrecht wirkende Belastungen, so werden die $< \alpha$ und $\alpha_1 = 0$ und die vorhergehende Construction wird wesentlich einfacher.

Elemente zur Construction der Druckcurve. — Das Langwierigste ist die als Vorarbeit zu betrachtende Bestimmung der Kräfte R in Grösse und Lage. In den praktisch wichtigen Fällen handelt es sich gewöhnlich nur um das eigene Gewicht des Gewölbes und einer stetig auf seinem Rücken vertheilten Belastungsmasse. Nimmt man an, dass von letzterer immer nur der vertical über dem Rücken eines Gewölbstücks gelegene Theil dasselbe belaste, so ist jene Vorarbeit auf die Bestimmung von Flächen wie Fig. 7, und von deren verticalen Schwerlinien zurückgeführt. Da es hier auf keine sehr grosse Genauigkeit ankommt, so können vereinfachende Annäherungsmethoden Anwendung finden. Bekanntlich nimmt man zu diesem Zwecke häufig die Gewölbfugen senkrecht an, zerlegt die Fläche in verticale, als Trapeze zu berechnende Lamellen und bestimmt deren Schwerlinie mittelst des Seilpolygon's.

§. 3.

Mathematische Gewölbstärke.

Erklärung. Man denke sich ein Gewölbe von unendlich festem Material, welches sich nur in mathematischem Gleichgewichte befindet. Die Stärke desselben, welche vom Kämpfer bis zum Scheitel constant angenommen werden soll (so dass der Rücken parallel der Leibung ist), mag „die mathematische Stärke“ für die gegeben gedachte Belastung und Form der Leibungslinie heissen.

In einem solchen Gewölbe gibt es wegen des mathematischen Gleichgewichts nur E i n e Druckcurve, daher eine Unbestimmtheit über die Druckvertheilung hiebei nicht stattfindet. Wegen der unendlichen Festigkeit reicht aber die Curve bis an die Gewölbgrenzen hin, d. h. sie t r i f f t Rücken und Leibung, und zwar (eben weil nur E i n e Curve möglich sein soll) beide abwechselnd.

Beispiele. — In den Figuren 8—15 sind mathematische Stärken von Halbkreisgewölben und beispielsweise angenommenen Formen von Stich-, Korb- und Spitzbögen aufgetragen.* Als Belastung ist in den Figuren mit geraden Nummern (8, 10, 12 u. 14) nur das eigene Gewicht angenommen, in den Figuren mit ungeraden Nummern aber ausserdem eine über dem Gewölbrücken stetig vertheilte, in der Scheitelhöhe desselben horizontal abgeglichene Masse, von welcher vorausgesetzt wird, dass sie der Gewölbmasse gleich schwer und vollkommen unfest sei, dass sie keinerlei Seitendruck ausübe, vielmehr nur vertikal wirke, so zwar, dass jeder Gewölbtheil den senkrecht über seinem Rücken befindlichen Belastungstheil direkt zu tragen habe.

Bestimmung der mathematischen Gewölbstärke. — Man nehme zuerst nach dem Gefühle eine mehr als mathematische Stärke an und construire durch Probiren diejenige Curve, welche, ohne irgendwo über das Ge-

* Nach Méry, in den „Annales des Ponts et Chaussées“ vom Jahre 1841.

wölbe hinauszufallen, die eine der beiden Gewölbgrenzen in zwei Punkten trifft und dazwischen sich der andern Grenze nähert. In den meisten Fällen (vergl. die Beispiele) hat diese Curve die Lage Fig. 16; sie berührt den Rücken am Scheitel, trifft ihn am Kämpfer und nähert sich dazwischen der Leibung. Sie kann aber auch eine andere Lage, z. B. wie Fig. 17 oder 18 haben. Wie dem auch sei, man misst den geringsten Abstand a der Curve von der Gewölbgrenze gegenüber und kann daraus angenähert schliessen, um wie viel die angenommene Stärke (d der Figuren) zu gross ist. Man vermindert sie dementsprechend und verfährt bei der neuen Stärke d′ wieder so, wodurch man einen neuen (positiven oder negativen), aber jedenfalls kleineren Curvenabstand a′ erhält (Fig. 19, welche beispielsweise der Fig. 16 entspricht). Wie viel auch d′ noch zu gross ist, kann nun angenähert aus der Proportion gefunden werden:

$$a - a' : d - d' = a' : x,$$

und man kann sich durch nochmalige Curvenconstruction von dem Genauigkeitsgrade des gefundenen Resultates leicht überzeugen.

Dieses Verfahren, aus welchem auch die Fig. 8—15 hervorgegangen sind, ist, wie man sieht, nicht eben einfach, denn es müssen für jede neue Gewölbstärke zuerst die äusseren Kräfte der einzelnen Gewölbtheile in Grösse und Lage bestimmt werden. Indessen braucht man die Curve nicht jedesmal vollständig, sondern nur in der Gegend des kleinsten Abstandes a zu construiren, nachdem einmal ihr Verlauf im Allgemeinen bekannt ist.

Bruchfugen. — So nennt man diejenigen Fugen, bei welchen die Gefahr sich zu öffnen am grössten ist, und in welchen daher bei wirklich erfolgendem Einsturz die Bewegung beginnt.

Bei nur mathematischem Gleichgewichte befinden sich dieselben an den Berührungs- oder Treffungspunkten der Druckcurve mit den Gewölbgrenzen. In den Fig. 8—15 sind sie in der Weise angegeben, wie sie sich öffnen. In den meisten Fällen befindet sich, wie man sieht, eine Bruchfuge an jedem Kämpfer, eine im Scheitel und eine in jedem Schenkel, so dass im ganzen Gewölbe deren fünf vorhanden sind, und dasselbe beim Einsturz in vier Theile zerfällt, wobei der Scheitel sich entweder hebt oder senkt, je nachdem die Scheitelfuge sich nach oben oder unten öffnet. Ersteres findet statt in Fig. 11, 14 u. 15, letzteres, welches noch häufiger vorkommt, in Fig. 8, 10, 12 u. 13. Mitunter befindet sich aber auch keine Bruchfuge im Scheitel, so dass beim Einsturz eine ungerade Anzahl von Theilen, gewöhnlich fünf, entstehen (so in Fig. 9).

Vergleichung der verschiedenen Belastungen. — Je kleiner die mathematische Stärke, um so günstiger ist offenbar eine Belastungsweise bei gegeben gedachter Gewölbform. So folgt z. B. aus Fig. 8 und 9, dass für den Halbkreis die horizontal abgeglichene Belastung günstiger ist als nur das eigene Gewicht; ebenso für den Korbbogen (Fig. 12 u. 13), wogegen für den Stich- und Spitzbogen das Umgekehrte stattfindet. Noch günstiger für letzteren ist aber eine schräg nach dem Scheitel ansteigend abgeglichene Belastung (wie bei den gothischen Gibeln), welche am Scheitel ihr Maximum hat. Es entstehen dann sechs Bruchfugen, und der Einsturz erfolgt durch Senkung des Scheitels.

Vergleichung verschiedener Gewölbformen bei gegebener Belastungsweise. — Auch hierüber gibt die mathematische Gewölbstärke Aufschluss. So erkennt man aus Fig. 8—15, dass bei nur eigenem Gewicht der Stichbogen die günstigste, der Korbbogen die ungünstigste Form ist, und dass zwischen diesen beiden der Spitzbogen günstiger ist, als der Halbkreis. Ist hingegen noch eine horizontal abgeglichene Belastung von der oben beschriebenen Art vorhanden, so ist zwar wieder der Stichbogen am günstigsten, es folgen aber sodann der Reihe nach der Halbkreis, der Korb- und zuletzt der Spitzbogen.

Bei Anwendung dieser Ergebnisse auf die Praxis ist jedoch der dabei gemachten Voraussetzungen (mathematisches Gleichgewicht, unendliche Materialfestigkeit) nicht zu vergessen, und ferner zu bedenken, dass auf die Gewölbewiderlager, welche einen wesentlichen Theil der Gesammtkosten veranlassen, bisher nicht Rücksicht genommen wurde. Aus der geringen mathematischen Stärke des Stichbogens z. B. ist noch nicht unbedingt auf dessen grössere Zweckmässigkeit zu schliessen, denn wegen des grösseren Horizontalschubs bedarf diese Form sowohl eines grösseren Zusatzes an Stärke für die Praxis, als auch stärkerer Widerlager.

Ideale Gewölbformen. — Für jede gegebene Belastungsweise gibt es eine Gewölbform, welche ersterer so vollkommen entspricht, dass die mathematische Stärke gleich Null ist, somit Rücken, Leibung und Druckcurve in Eine Linie zusammenfallen und sämmtliche Fugen Bruchfugen sind. Diese Form mag, weil ihre Vortheile gegenüber nicht sehr abweichenden einfacheren Formen in der Praxis wenig in Betracht kommen, ideale Form heissen. Sie ist als umgestürzte, nicht gespannte sondern gepresste Seilcurve zu betrachten und auch nach denselben Grundsätzen zu bestimmen.

Gewisse Eigenthümlichkeiten dieser Linien lassen sich schon a priori kennen. Bei discontinuirlicher (an einzelnen Punkten concentrirter) Belastung entsteht ein Polygon aus Geraden, bei stetiger Lastvertheilung eine stetige Curve, und wenn beiderlei Belastungen vereinigt sind, ein Curvenpolygon (z. B. ein Spitzbogen, wenn nur der Scheitel eine Einzelbelastung trägt). Bei symetrischer Belastung ist natürlich auch die ideale Form symetrisch und hat, wenn jene zugleich stetig vertheilt ist, im Scheitel eine horizontale Tangente. Weil aber in Gewölben das Material immer nur gepresst ist, so ist die Curve immer nach der Seite hin concav, nach welcher die äusseren Kräfte gerichtet sind (bei senkrecht abwärts wirkender Belastung z. B. nach unten).

Besondere Fälle. — Ist das Gewölbe nur senkrecht, und der entwickelten Curvenlänge nach gleichförmig belastet, so entsteht bekanntlich als ideale Form die gemeine Kettenlinie; ist aber die senkrechte Belastung in horizontalem Sinne gleichmässig vertheilt, so erhält man die gemeine Parabel. Wirkt hingegen die Belastung nicht senkrecht, sondern normal zur Curve, und ist wieder gleichmässig vertheilt längs derselben, so ist die Idealform der Kreis. Letzterer Fall tritt ein angenähert unter hohen Flüssigkeitssäulen, und mit gröberer Annäherung auch unter hohen Erdschüttungen.

§. 4.

Druckvertheilung in symetrischen Gewölben von mehr als mathematischer Stärke.

Annahme eines bestimmten Horizontalschubs. — Die obwaltende statische Unbestimmtheit (§. 1) ist schon durch die Voraussetzung der Symetrie, welche die Horizontalität des Scheiteldrucks bedingt, beschränkt. Sie wird es noch mehr, wenn man sich die Grösse des Horizontalschubs gegeben und etwa in der Weise der Fig. 20 durch eine aktive, willkührliche Kraft K ersetzt denkt. Man begreift, dass auf diese Weise jeder einzelne Fugendruck seiner Grösse und Richtung nach gegeben ist, so dass nur noch in Betreff der Lage seines Angriffpunktes eine Unbestimmtheit verbleibt.

Grenzen für die Grösse des Horizontalschubes bei unendlich festem Material. — Lässt man nun die Kraft K von einem dem Gleichgewichte entsprechenden Werthe aus stetig abnehmen, so weicht das bewegliche Widerlager etwas zurück, der Gewölbscheitel senkt sich und die Curve nähert sich daselbst dem Rücken, an den Kämpfern hingegen des Leibung, bis endlich das Gewölbe durch Oeffnen der Fugen, wie in Fig. 20 angedeutet, in sich zusammenstürzt, in welchem Augenblicke die Curve die dort eingezeichnete möglichst steile Form hat.

Lässt man umgekehrt die Kraft K von jenem ersten Werthe aus stetig wachsen, so nähert sich das bewegliche Widerlager dem festen; der Scheitel hebt sich, die Curve nähert sich daselbst der Leibung, am Kämpfer dem Rücken, stellt sich also immer flacher, und der Einsturz erfolgt endlich nach Fig. 21 mit Erhebung des Scheitels. Doch kann dieser Fall begreiflicherweise nur dann eintreten, wenn die Leibung am Scheitel höher liegt als der