Persistenter Identifier:	1571051867188_1969
Titel:	ARCH+ : Studienhefte für architekturbezogene Umweltforschung und -planung
Ort:	Stuttgart
Datierung:	1969
Strukturtyp:	volume
Lizenz:	Rechte vorbehalten - Freier Zugang
PURL:	https://digibus.ub.uni-stuttgart.de/viewer/image/1571051867188_1969/1/

Abschnitt:	Einfache Spiele als Modelle einfacher Entscheidungsstrukturen
Autor:	Schreiber, Peter
Strukturtyp:	article
Lizenz:	Rechte vorbehalten - Freier Zugang
PURL:	https://digibus.ub.uni-stuttgart.de/viewer/image/1571051867188_1969/221/LOG_0042/

Peter Schreiber, M.Sc.

EINFACHE SPIELE ALS MODELLE EINFACHER ENTSCHEIDUNGSSTRUKTUREN

(Veränderte und erweiterte Fassung eines Referates auf dem Symposion Planungsmethoden, HBK + TUB am 25.6.1969)

1. Der vorzutragende Beitrag soll ein Beispiel dafür sein, wie sich ein sprachlich formulierter Sachverhalt formalisieren läßt.

Frage 1: Warum sollen einfache Entscheidungsstrukturen ein Beitrag zu einem Symposion über Planungsmethoden sein?
Frage 2: Warum sind Formalisierungen heute erforderlich?

Lassen Sie mich bitte kurz beide Fragen, ausgehend von einer vereinfachten und damit anfechtbaren Position, beantworten, um nach der Beantwortung dieser Fragen zum Kern meines Beitrages zu kommen.

Zur Frage 1:
Planungsprozesse sind Problemlösungsprozesse. Die Menge der am Planungsprozeß teilnehmenden Personen hat die folgenden Gruppenentscheidungen zu treffen:

1. Welche der auftretenden Probleme sollen gelöst werden? - Wenn sich ein Problem lösen läßt, dann gibt es im allgemeinen nur unter sehr eingeschränkten Bedingungen eine eindeutig bestimmte Lösung.
Dies ist Anlaß für zwei weitere Entscheidungen:
2. Was tut man mit unlösbaren Problemen?
3. Welche der möglichen Lösungen soll in der Praxis angewendet werden?

Die hierbei auftretenden Gruppenentscheidungen gehören in den Bereich der einfachen Entscheidungsstrukturen.

Zur Frage 2:
Ein Teil einer Formalisierung eines Sachverhalts besteht darin, daß man ihn ganz oder teilweise symbolisiert.

Beispiel:
Der Satz: "Eine der deutschen Universitäten ist die Technische Universität Berlin"
läßt sich teilweise symbolisieren: "Eine der deutschen Unis ist die TUB".

Diese Symbolisierung leistet zweierlei:
a) Sie verkürzt die Länge des Satzes.
b) Sie verkleinert die Menge derjenigen Personen, die diesen Satz verstehen. (Es gibt bestimmt Berliner, welche die Abkürzung TUB nicht kennen.)

Die Leistung einer Symbolisierung besteht also im wesentlichen im Aufbau von Sprachbarrieren. (Dieser Aufbau von Sprachbarrieren wird übrigens auch mit Vorliebe von sogenannten Wissenschaftlern bei der "Verwissenschaftlichung" allgemein bekannter Sachverhalte betrieben, indem sie diese Sachverhalte mit Fremdwörtern oder aus Fremdwörtern zusammengesetzten neuen Fremdwörtern, ja sogar mit neu erfundenen deutschen Wörtern beschreiben.)

Was sollen nun Formalisierungen leisten? Um es ganz kurz zu sagen: Dasjenige, was von einer Symbolisierung unter "a" erreicht wird; und vermeiden dasjenige, was unter "b" als Sprachbarriere beschrieben ist.

Exakter versteht man unter einer Formalisierung eines Sachverhaltes die Konstruktion einer mathematisch-logischen Struktur, die ein Modell dieses Sachverhaltes sein kann. Eine der Forderungen an die Exaktheit einer Wissenschaft ist die Möglichkeit zur Auffindung von Widersprüchen, die dann also Hypothesen widerlegen. Diese Widersprüche lassen sich aber nur in formalisierten Darstellungen entdecken.

Ein rein praktischer Zwang zu Formalisierungen ist durch die große Anzahl der zu verwertenden Daten mit Hilfe elektronischer Rechenmaschinen gegeben, die zur Zeit nur formalisierte Sachverhalte verarbeiten können.

Es seien mir noch einige Bemerkungen darüber gestattet, welche Rolle meiner Meinung nach die Architektur in der heutigen Gesellschaft spielen sollte:

Ich betrachte die Architektur als eine angewandte Sozialwissenschaft, das heißt eine Wissenschaft, deren Methoden und Zielsetzungen aus einer exakten Soziologie, Ökonomie, Psychologie, Organisations- und Systemtheorie usw. abgeleitet werden.

Weder diese exakten Wissenschaften selbst noch ihre möglichen Anwendungen gibt es in genügender Anzahl

Zitat von Oskar Morgenstern (1):

"Eines der Hauptprobleme der Wissenschaft ist die Entwicklung ordentlicher Begriffe. Diese Aufgabe ist von besonderer Bedeutung in den Sozialwissenschaften, wo wir eine riesige Anzahl von Phänomenen vorfinden, die auf sehr schwierige Weise zu beschreiben, zu ordnen und zu analysieren sind. Nur ordentliche, scharf definierte Begriffe können Exaktheit geben; Daten, wie gut sie auch immer sein mögen, können dies nicht."

Das Studium der verhältnismäßig jungen Disziplinen der Sozialwissenschaften ist sehr schwierig, da erst seit einigen Jahren geplante Experimente, Beobachtungen und Messungen ähnlich denen in der Physik durchgeführt werden.

Da die soziale Welt, wie jedem von Ihnen einsichtig, sehr verschieden von der physikalischen Welt ist, sind auch die Theorien dieser Welten sehr voneinander abweichend. Stellen wir nun die Forderung der Exaktheit an eine Theorie, so läßt sich diese Exaktheit nur in Form einer logisch-mathematischen Struktur erreichen. Es wird dann also auch die mathematische Struktur einer sozialwissenschaftlichen Theorie unter Umständen erheblich von der mathematischen Struktur einer naturwissenschaftlichen Theorie abweichen.

Die Sozialwissenschaften haben meiner Meinung nach zur Zeit einen Grad der Mathematisierbarkeit erreicht, der bestenfalls demjenigen der Physik zur Zeit Galilei's entspricht.

Die Schwierigkeit wird die folgende sein: Es gibt keine reine exakte Sozialwissenschaft, also gibt es auch keine exakte angewandte. Aber es gab auch schon gut funktionierende Dampfmaschinen, bevor das Phänomen des Dampfes physikalisch voll erforscht war.

Also wird der Beitrag, den ich geben will, bescheiden sein, aber, wie ich hoffe, ein Beispiel einer elementaren Methodik geben, die geeignet ist, sprachlich formulierte Sachverhalte zu formalisieren. Ich werde deshalb im 2. Kapitel über einfache Begriffe der Mengenlehre sprechen, die elementaren Bausteine der modernen Mathematik. Diese werden heute bereits in Grundschulen gelehrt. Im 3. Kapitel benutze ich dann die Mengenlehre zur Formalisierung sprachlich gegebener Sachverhalte und Fragestellungen aus der Theorie der einfachen Spiele.

II. Mengenlehre

Die hier anwesenden Personen bilden eine Menge. Ich bezeichne sie mit N. Da die Anzahl der hier anwesenden Personen endlich ist, kann ich sie alle aufführen und schreiben

$$N = n_1, n_2, n_3, \dots n_m \quad .$$

Zur Identifizierung der einzelnen Teilnehmer könnte ich etwa die Nummer des Personalausweises nehmen und anstelle dieser Nummer n_1 oder n_2 oder ... n_m schreiben.

Anstelle der $n_1 \dots n_m$ benutze ich jetzt nichtindizierte Zeichen des Alphabets a, b, c, ... Dem Ausdruck "die Person a ist unter den hier Anwesenden" entspricht der mathematische Ausdruck: "a ist Element der Menge N". Dafür schreibt man kürzer:

$$a \in N$$

Mengen lassen sich aber auch auf andere Weise charakterisieren. Zum Beispiel definiere ich: R sei die Menge aller hier anwesenden Vierradbesitzer. Das läßt sich formaler schreiben:

$R = \{x \in N \mid x \text{ besitzt ein Vierrad}\}$

Die geschweifte Klammer gibt immer an, daß es sich um Mengen handelt. Vor dem Strich steht eine Bedingung, die den Individuenbereich der zu betrachtenden Menge angibt. Hinter dem Strich wird eine Bedingung gegeben, die darüber entscheidet, ob ein beliebiges $x \in N$ ein Element ist aus R oder nicht. Wenn nämlich gilt "y besitzt kein Vierrad", dann ist y kein Element aus R. Dafür schreibt man:

$$y \notin R$$

Noch eine Bemerkung zu der Bedingung, die vor dem Strich steht. Wenn anstelle von "$x \in N$" "$x \in B$" steht, wobei B die Menge aller Berliner ist, dann bekomme ich eine die Menge R echt enthaltende Menge R'.

Meinen Individuenbereich darf ich beliebig wählen, sei er jetzt M, die Menge aller Menschen, dann gilt: B ist eine Teilmenge (Untermenge) von M, in Zeichen $B \subseteq M$. Wie Sie sich leicht überlegen können, gilt weiterhin bei Definition

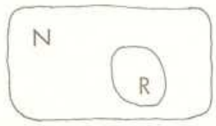
$R' = \{x \in B \mid x \text{ besitzt ein Vierrad}\}$

$$R \subseteq R',$$

d.h. es gilt sogar: R ist echt in R' enthalten, da nicht alle Berliner Vierradbesitzer hier anwesend sind. In Zeichen:

$R \subset R'$ (R ist echte Untermenge von R')

Mein Individuenbereich sei nun wieder die Menge N der hier Anwesenden. Ich gebe jetzt zur Illustration auch eine graphische Darstellung des Sachverhalts Teilmenge:



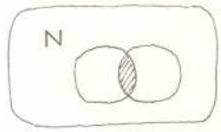
Wir definieren nun eine neue Teilmenge von N, die Menge G der Zweiradbesitzer unter den hier Anwesenden.

$$G = \{x \in N \mid x \text{ besitzt ein Zweirad}\}$$

Für je zwei Mengen läßt sich eine Operation, genannt der Durchschnitt, von R und G wie folgt definieren:

$$R \cap G = \{x \in N \mid x \in R \text{ und } x \in G\}$$

In Worten: die Menge $R \cap G$ besteht genau aus denjenigen der hier Anwesenden, die ein Zweirad **und** ein Vierrad besitzen.

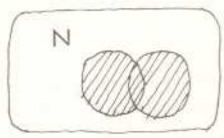


$R \cap G$

Eine weitere mengentheoretische Operation, genannt die Vereinigung von R und G wird wie folgt definiert:

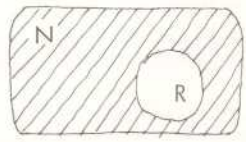
$$R \cup G = \{x \in N \mid x \in R \text{ oder } x \in G\}$$
("oder" nicht im Sinne von 'entweder...oder')

In Worten: die Menge $R \cup G$ besteht genau aus denjenigen hier Anwesenden, die ein Zweirad **oder** ein Vierrad besitzen.



Bei gegebener Menge N und Teilmenge R von N kann man dann das Komplement von R bezüglich N bilden. In Zeichen:

$$N - R = \{x \in N \mid x \notin R\}$$



Mit $\emptyset$ bezeichnet man die leere Menge, die Menge, die kein Element enthält. Sie ist in jeder Menge enthalten.

Zu einer gegebenen Menge N können wir die Menge aller ihrer Teilmengen betrachten. Dazu gehört die Menge $\emptyset$, da sie in jeder Menge enthalten ist, und die Menge N selbst. Wir bezeichnen die Menge aller Teilmengen einer Menge N als **Potenzmenge**:

$$P(N)$$
$$P(N) = \{U \mid U \subset N\}$$

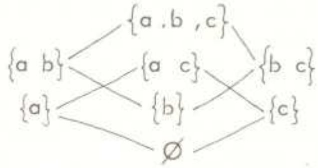
Für $N = \{a\}$ ist $P(N) = \{\emptyset, \{a\}\}$

Für $N = \{a, b\}$ ist $P(N) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a,b\}\}$

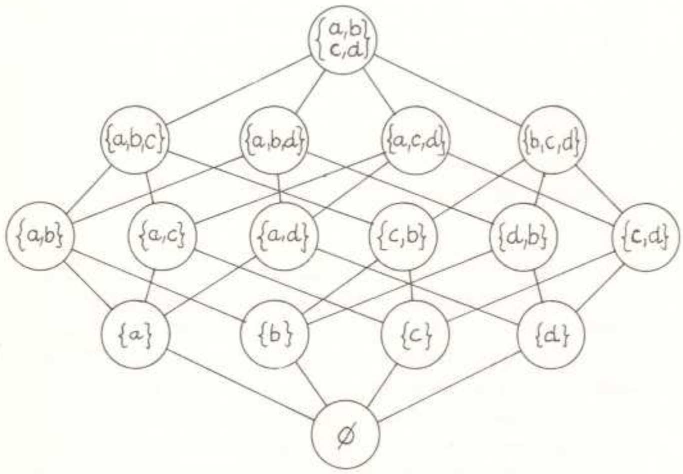
Für $N = \{a, b, c\}$ ist

$$P(N) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a,b\}, \{a,c\}, \{b,c\}, \{a,b,c\}\}$$

Wir können diese Menge bezüglich der Teilmengenbildung als Graph anordnen. Wir nennen diesen Graphen den Potenzmengenverband von N. Für die dreielementige Menge $N = \{a,b,c,\}$ ergibt sich:



Die Verbindungslinien sind so aufzufassen, daß das jeweils darunter stehende Objekt in dem darüber stehenden Objekt enthalten ist.
Die triviale Inklusion der leeren Menge ist dabei nicht eingezeichnet.
Der Potenzmengenverband der Menge $N = \{a,b,c,d\}$ unserer Abbildung zeigt, welche komplexe Struktur sich bereits bei vier Elementen herausbildet.



Es sei noch einmal ausdrücklich darauf hingewiesen, daß wir ausgehend von N eine neue Menge P(N) gebildet haben, deren Elemente alle Teilmengen von N sind. Also gilt etwa:

$$\{a,d\} \in P(N)$$

Zur Übung vergegenwärtige man sich noch einmal die Operationen des Durchschnitts, der Vereinigung und Komplementärbildung im vorliegenden Beispiel:

$$\{a,c\} \cap \{a,d\} = \{a\}$$
$$\{a,c\} \cup \{a,d\} = \{a,c,d\}$$
$$N - \{a,c\} = \{b,d\}$$

Zum Abschluß noch eine Vereinbarung: Mit $|N|$ bezeichnen wir die Anzahl der Elemente von N.

Wenn dann $|N| = n$, d.h. N besitzt n Elemente, dann besitzt die Potenzmenge P(N) 2^n Elemente.

$$|N| = n \rightarrow |P(N)| = 2^n$$

III. Theorie der einfachen Spiele

Die Spieltheorie hat sich aus der Frage nach optimalen Strategien bei Spielen wie Poker, Schach, Würfeln usw. entwickelt. Also die Frage nach dem optimalen Verhalten eines Spielers mit dem Ziel, das Spiel zu gewinnen.

John von Neumann und Oskar Morgenstern schrieben 1944 das grundlegende Werk über Spieltheorie und eine mögliche Anwendung dieser Theorie in der Ökonomie (Theory of games and economic behavior).

In diesem Buch wurden dann die Begriffe der Spieltheorie so gut verallgemeinert, daß sie auch Anwendung in anderen Bereichen der Sozialwissenschaften finden konnten.

Anwendbar ist die Spieltheorie zur Zeit nur auf sehr einfache ökonomische, politische und soziologische Fragestellungen.

Ich möchte hier über einen nichtnumerischen, einen strukturalen Aspekt der Spieltheorie sprechen, speziell der einfachen Spiele. Unter einem einfachen Spiel versteht man ein Mehrpersonenspiel, also ein Spiel mit einer endlichen Menge N von Teilnehmern, wobei diejenige Teilmenge, die gewinnt, die Gewinnkoalition heißt. Einfach heißt das Spiel deshalb, weil es nur Gewinnen oder Verlieren zum Ergebnis haben kann.

L.S. Shapley begann die einfachen Spiele nur unter dem mengentheoretischen Gesichtspunkt zu untersuchen und nicht unter dem Gesichtspunkt von Gewinnstrategien.

Ich will hier eine Motivation für einfache Spiele geben, wie sie sich aus den Machtverhältnissen eines Parlaments ableiten läßt. Das Parlament, die Menge Abgeordnete, sei die Menge der Spieler. Ist nun ein Abstimmungsmodus 'einfache Mehrheit' vorgegeben - unsere Spielregel -, dann gewinnt diejenige Teilmenge G von N, für die gilt:

$$|G| > |N - G|$$

(wobei $|N|$ eine ungerade Zahl sei)

Bei dem Abstimmungsmodus 'Zweidrittelmehrheit' muß eine Gewinnkoalition entsprechend größer sein. Bei Aktionärsversammlungen gibt es den Begriff der Sperrminorität, die 25 % beträgt; das Spiel ist also gewonnen, wenn sich diese 25 % finden. Wesentlich bei all diesen Abstimmungen ist, daß zusätzliche Stimmen nichts am Ergebnis ändern. Bei jeder Abstimmung, bei jedem Spiel ist also nur eine minimale Gewinnkoalition erforderlich.

Wie können wir diese Gruppenentscheidungsprozesse auf allgemeine Art formalisieren? Wir wollen sie auch nicht nur symbolisieren, etwa derart, daß wir Hans Mayer mit M_1, Jürgen Mayer mit M_2 bezeichnen, sondern wir suchen diejenige mathematisch-logische Struktur, die ein Modell für diese Spiele sein kann.

Auf wissenstheoretisch zwingende Weise läßt sich dieser linguistisch formulierte Sachverhalt bereits mengentheoretisch darstellen.

Gegeben sei eine endliche Menge N, die Menge der Spieler. Die Gewinnkoalition eines beliebigen Spieles besteht dann aus einer Teilmenge von N, zum Beispiel $S \subseteq N$. Es kann bei jedem Spiel mehrere Gewinnkoalitionen geben, nämlich alle Teilmengen von N, die S enthalten. Der Begriff, der also zu formalisieren ist, besteht aus einer Menge von Teilmengen von N , den Gewinnkoalitionen. In Zeichen:

$$\overline{W} \subseteq P(N)$$

Wir geben nun zwei Bedingungen an, unter denen eine Teilmenge von $\overline{W} \subseteq P(N)$ als Gewinnkoalitionen bezeichnet werden soll.

1)	$\emptyset \in W$
2) wenn	$S \subseteq T \subseteq N$
und	$S \in W$
dann gelte	$T \in W$

Die Bedingung 1), die besagt, daß die leere Menge in den Gewinnkoalitionen enthalten sein muß, ist aus technisch-mathematischen Gründen wichtig. Wesentlich für unsere Betrachtung hier ist die Bedingung 2). Sie ist die Formalisierung dessen, was man als 'Gewinnen' verstehen kann. Sie besagt, daß irgendeine Koalition (oder Teilmenge) von N, die eine Gewinnkoalition (ein Element aus $\overline{W}$) enthält, auch gewinnt. Melden sich bei einer Abstimmung mit dem Modus 'Zweidrittel' sogar drei Viertel, dann ist das Spiel auch gewonnen.

Wie man Gewinnkoalitionen erhält, ist eine Frage des Spiels und der speziellen Strategie.

Ich habe also ausgehend von N eine Teilmenge von $\overline{W} \subseteq P(N)$ betrachtet, die die Bedingungen 1) und 2) erfüllen muß. Zur formalen Charakterisierung eines einfachen Spiels genügt also dieses Paar (N, $\overline{W}$), und da noch zusätzliche Bedingungen, nämlich 1) und 2) vereinbart waren, schreibe ich abkürzend für den Begriff des einfachen Spiels

$$\Gamma (N, \overline{W})$$

Für Eingeweihte - dazu gehören natürlich auch Sie - wird damit durch das Symbol $\Gamma(N, \overline{W})$ die gesamte logisch-mathematische Struktur eines einfachen Spiels gegeben.

Um uns mit dem Begriff des einfachen Spiels besser vertraut zu machen, werden wir jetzt alle möglichen Spiele mit 1, 2 oder 3 Spielern aufzählen.

Die Menge N der Spieler bestehe aus einem Element, d.h.

$N = \{a\}$ dann ist

$P(N) = \{\emptyset, \{a\}\}$

Es gibt dann nur eine mögliche Art von Gewinnkoalitionen:

$\overline{W} = P(N)$. Denn wegen 1) gilt
$\emptyset \in \overline{W}$. Aus 2) folgt, daß
$\emptyset \subseteq \{a\} \subseteq \{a\}$
$\{a\} \in \overline{W}$.

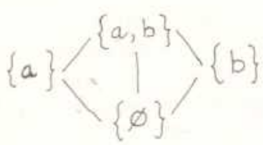
Insgesamt ist somit die leere Menge $\emptyset$ und auch die Menge $\{a\}$ in $\overline{W}$ enthalten, also

$\overline{W} = P(N)$

Das heißt, es gibt nur e i n e mögliche Art von Gewinnkoalitionen. Sei nun

$N = \{a,b\}$, dann ist
$P(N) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a,b\}\}$

Als Verband dargestellt:



Hier gibt es zwei Arten von Gewinnkoalitionen:

$\overline{W}_1 = \{\emptyset, \{a,b\}\}$
$\overline{W}_2^1 = \{\emptyset, \{a\}, \{a,b\}\}$
$\overline{W}_2^2 = \{\emptyset, \{b\}, \{a,b\}\}$

Wir betrachten $\overline{W}_2^1$ und $\overline{W}_2^2$ als gleiche Arten von Gewinnkoalitionen, da sie sich nur durch eine Permutation der Menge der Spieler unterscheiden ($\overline{W}_2^1$ wird zu $\overline{W}_2^2$, wenn man a an Stelle von b schreibt).

Sei nun $N = \{a,b,c\}$

Man betrachte hierzu den im zweiten Kapitel entwickelten Potenzmengenverband von N. Es gibt dann die folgenden Arten von Gewinnkoalitionen:

$\overline{W}_1 = \{\emptyset, \{a\}, \{a,b\}, \{a,c\}, \{a,b,c\}\}$
$\overline{W}_2 = \{\emptyset, \{a,b\}, \{a,b,c\}\}$
$\overline{W}_3 = \{\emptyset, \{a,b,c\}\}$
$\overline{W}_4 = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a,b\}, \{a,c\}, \{b,c\}, \{a,b,c\}\}$
$\overline{W}_5 = \{\emptyset, \{a,b\}, \{a,c\}, \{a,b,c\}\}$

Die Spieler selbst sind übrigens immer in den möglichen Gewinnkoalitionen enthalten.

N	1	2	3	4	5
Anzahl der Spiele	1	2	5	20	179

Man erkennt an dieser Zusammenstellung, um wieviel stärker die Anzahl der Spiele gegenüber der Anzahl der Spieler wächst. Ist man an den Struktureigenschaften dieser Spiele interessiert (man ist es, da sie Modelle von Gruppenentscheidungsprozessen sind), dann wird es äußerst mühsam sein, durch Abzählen und Kombinieren alle möglichen Arten von Gewinnkoalitionen aufzufinden.

Um dennoch diese Aufgabe zu bewältigen, begeht man einen in der modernen Mathematik üblichen Weg, den ich allerdings hier nur andeuten und plausibel machen kann. Man sucht Unterstrukturen dieser Spiele auf, die sogenannten Kommittees, und zerlegt sie so lange, bis sie sich nicht mehr zerlegen lassen. Aus diesen Primärkomponenten läßt sich dann jedes einfache Spiel durch 'Summen- und Produktbildung' als zusammengesetzt aus seinen Primärkomponenten darstellen.

Methodisch entspricht dies in etwa dem Ihnen allen bekannten Sachverhalt, daß sich jede natürliche Zahl eindeutig als Produkt von Primzahlpotenzen darstellen läßt.

Im Kapitel I habe ich auf die Bedeutung einfacher Entscheidungsstrukturen hingewiesen. Die hier genannten einfachen Spiele sind nun Modelle dieser Entscheidungsstrukturen und lassen, wie der Hauptsatz über ihre Zerlegbarkeit angibt, sich in Primärkomponenten zerlegen. Dieser Satz wurde von L.S. Shapley bewiesen (2).

IV. Schlußwort

Leider konnte ich hier nur einen Abriß eines theoretischen Ergebnisses darstellen, das bei geschickter Anwendung es erlauben könnte, einfache Entscheidungsstrukturen in Primärkomponenten zu zerlegen, und damit vielleicht einen kleinen Beitrag zu Planungsmethoden liefern.

Literatur

New Methods of Thought and Procedure
(Editors: F. Zwicky, A.G. Wilson)
Springer Verlag, Berlin 1967

1 Seite 204
2 Seite 270