

-
- Persistenter Identifier:** 1602495396786_31_1875
- Titel:** Jahreshefte des Vereins für Vaterländische Naturkunde in Württemberg : zugl. Jahrbuch d. Staatlichen Museums für Naturkunde in Stuttgart
- Ort:** Stuttgart
- Datierung:** 1875
- Signatur:** XIX/965.8
- Strukturtyp:** volume
- Lizenz:** <https://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/>
- PURL:** https://digibus.ub.uni-stuttgart.de/viewer/image/1602495396786_31_1875/1/
- Abschnitt:** Ueber den möglichen Zusammenstoss zweier Himmelskörper
- Autor:** Brenner, Johann Jakob
- Strukturtyp:** article
- Lizenz:** <https://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/>
- PURL:** https://digibus.ub.uni-stuttgart.de/viewer/image/1602495396786_31_1875/183/LOG_0034/

Ueber den möglichen Zusammenstoss zweier Himmelskörper.

Von Oberlehrer **Brenner** in Tuttlingen.

Ich setze zwei aus isotropen Kugelschalen zusammengesetzte Körper in dem freien Himmelsraum, mit oder ohne Bewegung voraus. Es fragt sich nun, wie verhalten sich diese beiden Kugeln unter der Voraussetzung, dass alle übrigen Himmelskörper als nicht vorhanden gedacht werden. Namentlich sind die Bedingungen anzugeben, unter denen ein Zusammenstoss stattfindet.

Der Satz, dessen Beweis hier nicht durchgeführt werden soll, dass aus isotropen Schalen zusammengesetzte Kugeln sich so anziehen und angezogen werden, als ob ihre Massen im Centrum vereinigt wären, erleichtert die Lösung dieser Aufgabe gar sehr, indem man es nur mit bewegten Massenpunkten zu thun hat.

Betrachten wir vorerst ein System von Kugeln mit den Massen $m, m', m'' \dots$ und setzen die rechtwinkligen Coordinaten von m gleich x, y, z , diejenigen von m' gleich x', y', z' u. s. f., so ist die Entfernung des Körpers m' von m gleich

$$\sqrt{(x' - x)^2 + (y' - y)^2 + (z' - z)^2},$$

und die Wirkung m' auf m vermöge des Gesetzes der allgemeinen Gravitation gleich

$$\frac{m'}{(x' - x)^2 + (y' - y)^2 + (z' - z)^2}.$$

Zerlegt man diese Wirkung parallel mit der Achse x , so wird die mit dieser Achse parallele und die Achse x zu ver-

grössern strebende Componente

$$\frac{m'(x' - x)}{[(x' - x)^2 + (y' - y)^2 + (z' - z)^2]^{\frac{3}{2}}} \text{ oder} \\ \frac{1}{m} \left\{ \frac{d}{dx} \frac{m m'}{\sqrt{(x' - x)^2 + (y' - y)^2 + (z' - z)^2}} \right\} \text{ sein.}$$

Man wird auf ähnliche Art

$$\frac{1}{m} \left\{ \frac{d}{dx} \frac{m m''}{\sqrt{(x'' - x)^2 + (y'' - y)^2 + (z'' - z)^2}} \right\}$$

für die Wirkung des Körpers m'' auf m parallel mit der Achse x haben, und so für die übrigen Körper.

Es sei also

$$\lambda = \frac{m m'}{\sqrt{(x' - x)^2 + (y' - y)^2 + (z' - z)^2}} \\ + \frac{m m''}{\sqrt{(x'' - x)^2 + (y'' - y)^2 + (z'' - z)^2}} \\ + \frac{m' m''}{\sqrt{(x'' - x')^2 + (y'' - y')^2 + (z'' - z')^2}} \dots$$

so wird $\frac{1}{m} \frac{d\lambda}{dx}$ die Summe aller Wirkungen der Kräfte m' , $m'' \dots$ auf m parallel mit der Achse x zerlegt sein.

Bezeichnet man daher mit dt das Element der Zeit t , welche als unabhängige Veränderliche angenommen wird, so wird man nach den Lehren der Dynamik folgende Gleichung haben.

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} - \frac{d\lambda}{dx} = 0 \text{ und ebenso für die Achsen } y \text{ und } z$$

$$m \frac{d^2 y}{dt^2} - \frac{d\lambda}{dy} = 0$$

$$m \frac{d^2 z}{dt^2} - \frac{d\lambda}{dz} = 0$$

Für die übrigen Körper hat man gleicher Weise

$$m' \frac{d^2 x'}{dt^2} - \frac{d\lambda}{dx'} = 0$$

$$m' \frac{d^2 y'}{dt^2} - \frac{d\lambda}{dy'} = 0$$

$$m' \frac{d^2 z'}{dt^2} - \frac{d\lambda}{dz'} = 0 \text{ u. s. f.}$$

Die Bestimmung der Bewegungen der Massen $m, m', m'' \dots$ hängt nun von der Integration dieser Differentialgleichungen ab.

Addirt man die Differentialgleichungen für $x, x', x'' \dots$ und bemerkt, dass man, vermöge der Natur der Funktion λ hat

$$\frac{d\lambda}{dx} + \frac{d\lambda}{dx'} + \frac{d\lambda}{dx''} + \dots = 0 \text{ und so für die } y \text{ und } z,$$

so wird man erhalten, wofern Σ die auf $x, x', x'' \dots$ sich beziehende Summe bezeichnet

$$\Sigma m \frac{d^2 x}{dt^2} = 0 \text{ und ebenso}$$

$$\Sigma m \frac{d^2 y}{dt^2} = 0,$$

$$\Sigma m \frac{d^2 z}{dt^2} = 0.$$

Es seien X, Y, Z die Coordinaten des Schwerpunktes des Systems, so wird man vermöge der Eigenschaft dieses Punktes haben

$$X = \frac{\Sigma mx}{\Sigma m}; Y = \frac{\Sigma my}{\Sigma m}; Z = \frac{\Sigma mz}{\Sigma m} \text{ und folglich}$$

$$\frac{d^2 X}{dt^2} = 0; \frac{d^2 Y}{dt^2} = 0; \frac{d^2 Z}{dt^2} = 0.$$

Hieraus erhält man durch Integration

$$X = a + bt$$

$$Y = a' + b't$$

$$Z = a'' + b''t,$$

wo a, b, a', b', a'', b'' willkürliche Constanten sind.

Daraus folgt der wichtige Satz:

Die Bewegung des Schwerpunktes ist geradlinig und gleichförmig, und wird durch die gegenseitige Wirkung der Körper auf einander nicht geändert.

Multiplirciren wir nun die Differentialgleichungen für $y, y', y'' \dots$ respektive mit $x, x', x'' \dots$ und addiren sie zu den Differentialgleichungen für $x, x', x'' \dots$, die man respektive mit $-y, -y', -y'' \dots$ multiplicirt hat, so erhält man

$$\left. \begin{aligned} m \frac{x d^2 y - y d^2 x}{dt^2} + m' \frac{x' d^2 y' - y' d^2 x'}{dt^2} \dots \\ + y \left(\frac{d\lambda}{dx} \right) + y' \left(\frac{d\lambda}{dx'} \right) \dots \\ - x \left(\frac{d\lambda}{dy} \right) - x' \left(\frac{d\lambda}{dy'} \right) \dots \end{aligned} \right\} = 0.$$

Die Natur der Funktion λ gibt aber

$$y \left(\frac{d\lambda}{dx} \right) + y' \left(\frac{d\lambda}{dx'} \right) \dots - x \left(\frac{d\lambda}{dy} \right) - x' \left(\frac{d\lambda}{dy'} \right) \dots = 0.$$

Man erhält so, wenn man die vorhergehende Gleichung integrirt

- 1) $\sum m \frac{x dy - y dx}{dt} = c$ und auf gleiche Weise
- 2) $\sum m \frac{x dz - z dx}{dt} = c'$,
- 3) $\sum m \frac{y dz - z dy}{dt} = c''$,

wo c, c', c'' die eingegangenen, willkürlichen Constanten sind.

Multiplircirt man endlich die Differentialgleichungen für $x, x', x'' \dots$ respektive mit $dx, dx', dx'' \dots$ diejenigen für $y, y', y'' \dots$ respektive mit $dy, dy', dy'' \dots$ und diejenigen für $z, z', z'' \dots$ respektive mit $dz, dz', dz'' \dots$ und addirt sie, so wird man haben

$$\sum m \frac{dx d^2 x + dy d^2 y + dz d^2 z}{dt^2} - d\lambda = 0$$

und wenn man integrirt

$$4) \sum m \frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{dt^2} - 2\lambda = h,$$

wo h eine neue Constante vorstellt. *

* So weit Laplace in seiner *Mécanique céleste*.

Betrachten wir von nun an nur 2 Körper m und m' . Nehmen wir für den Anfang der Bewegung, wo

$$X = Y = Z = 0 \text{ auch } t = 0, \text{ so ist}$$

$$a = a' = a'' = 0.$$

Ersetzen wir nun x durch $bt + x$;

$$\begin{aligned} y & \text{ „ } b't + y; \\ z & \text{ „ } b''t + z; \\ x' & \text{ „ } bt + x'; \\ y' & \text{ „ } b't + y' \text{ und} \\ z' & \text{ „ } b''t + z', \end{aligned}$$

so beziehen sich die nunmehrigen x, y, z, x', y', z' , auf den Schwerpunkt und die Gleichungen 1), 2), 3) gehen, vermöge der die Eigenschaft des Schwerpunktes bezeichnenden Gleichungen

$$\begin{aligned} mx + m'x' &= 0, \\ my + m'y' &= 0, \\ mz + m'z' &= 0 \text{ und der daraus hervorgehenden} \end{aligned}$$

$$m \frac{dx}{dt} + m' \frac{dx'}{dt} = 0,$$

$$m \frac{dy}{dt} + m' \frac{dy'}{dt} = 0,$$

$$m \frac{dz}{dt} + m' \frac{dz'}{dt} = 0$$

über in die folgenden

$$5) \frac{m}{m'} (m + m') \frac{xdy - ydx}{dt} = c$$

$$6) \frac{m}{m'} (m + m') \frac{xdz - zdx}{dt} = c'$$

$$7) \frac{m}{m'} (m + m') \frac{ydz - zdy}{dt} = c''.$$

Die Gleichung 4) aber ändert sich, bedenkend, dass man die sich einschleichende constante Grösse mit h sich verschmelzen lassen kann, um in folgende

$$8) \frac{m}{m'} (m + m') \frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{dt^2} - \frac{2mm'^2}{(m + m') \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = h.$$

Die Gleichungen 5), 6), 7) haben die Eigenschaft, dass man aus ihnen die Differentiale dx , dy und dz eliminiren kann, und dabei stösst man auf die merkwürdige Gleichung

$$cz + xc'' - c'y = 0,$$

welche anzeigt, dass sich der Körper m in einer Ebene bewegt, und zwar in einer Ebene, die durch den Schwerpunkt geht.

Noch mehr. Substituire ich

$$\text{statt } x \text{ den Werth } - \frac{m'x'}{m},$$

$$\text{„ } y \text{ „ „ } - \frac{m'y'}{m},$$

$$\text{„ } z \text{ „ „ } - \frac{m'z'}{m},$$

so stosse ich auf die Gleichung

$$cz' + x'c'' - y'c' = 0,$$

welche anzeigt, dass sich der Körper m' in derselben Ebene bewegt.

Diese Bewegungsebene ist aber nur relativ in Beziehung auf den Schwerpunkt und ist eine absolute Ebene, wenn der Schwerpunkt sich in reeller Ruhe befindet.

Die Gleichungen

$$mx + m'x' = 0; \quad my + m'y' = 0; \quad mz + m'z' = 0$$

zeigen an, dass die beiden Körper m und m' sich gleichzeitig in ihrem Perihel, sowie in ihrem Aphel befinden, dass aber diese Apsiden einander räumlich entgegengesetzt sind. Auch folgt daraus, dass sie einen gleichzeitigen Umlauf um ihren Schwerpunkt aufweisen.

Der Umstand, dass die beiden Körper sich in derselben Ebene bewegen oder, wenn ich mich im fortschreitenden Schwerpunkt befinde, zu bewegen scheinen, erleichtert uns den Calcül sehr. Denn wir können dem Coordinatensystem eine solche Lage geben, dass alle $z = 0$ und es verbleiben uns die beiden Gleichungen

$$\frac{m}{m'} (m + m') \frac{xdy - ydx}{dt} = c \text{ und}$$

$$\frac{m}{m'} (m + m') \frac{dx^2 + dy^2}{dt^2} - \frac{2mm'^2}{(m + m')\sqrt{x^2 + y^2}} = h.$$

Gehen wir nun auf Polar-Coordinaten über und setzen den Abstand des Körpers m vom Schwerpunkt = r und den Winkel, den der Radius-Vektor r mit der Abscissenachse macht = α , so haben wir

$$\begin{aligned} x &= r \cos \alpha \text{ und} \\ y &= r \sin \alpha \text{ zu setzen.} \end{aligned}$$

Hiedurch erhalten wir, wenn wir noch Kürze halber

$$\begin{aligned} \frac{cm}{m(m + m')} \text{ durch } C \text{ und} \\ \frac{2mm'^2}{m + m'} \text{ durch } H \text{ ersetzen} \end{aligned}$$

$$9) \quad \frac{r^2 d\alpha}{dt} = C \text{ und}$$

$$10) \quad \frac{c}{C} \left(\frac{dr^2}{dt^2} + r^2 \frac{d\alpha^2}{dt^2} \right) - \frac{H}{r} = h.$$

Eliminiren wir zwischen beiden die Zeit t , so erhalten wir

$$cC \left(\frac{dr^2}{da^2} \cdot \frac{1}{r'^2} + \frac{1}{r^2} \right) - \frac{H}{r} = h,$$

welches die Differentialgleichung der Bahn für den Körper m ist.

Setze ich nun $r = \frac{1}{\rho}$, so ergibt sich

$$Cc \left(\frac{d\rho^2}{da^2} + \rho^2 \right) - H\rho = h, \text{ woraus folgt}$$

$$d\alpha = \sqrt{cC} \cdot \frac{d\rho}{\sqrt{h + H\rho - cC\rho^2}}.$$

Das Integral hievon ist

$$\alpha - \omega = - \frac{1}{\sin} \frac{H - 2cC\rho}{\sqrt{H^2 + 4hcC}},$$

wo ω die eingegangene Constante vorstellt.

Daraus ergibt sich

$$11) \quad \frac{1}{\rho} = r = \frac{2cC}{H + \sin(\alpha - \omega) \sqrt{H^2 + 4hcC}},$$

welches die Gleichung einer Ellipse ist.

Wie $mx + m'x' = 0$ und $my + m'y' = 0$, so ist auch
 $mr + m'r' = 0$,
 und wir erhalten die Bahn für den Körper m' , wenn wir nur
 überall m mit m' und r mit r' vertauschen.

Daraus folgt, dass sich zwei aus isotropen Kugelschalen zusammengesetzte Körper, unter Hinwegdenkung aller übrigen Einwirkungen, in Ellipsen um ihren gemeinschaftlichen Schwerpunkt, als Brennpunkt bewegen,

ein Satz, der sofort seine Anwendung auf die Doppelsterne findet, weil dieselben solche Distanzen von den übrigen Weltkörpern aufweisen, dass deren Einwirkungen als Null betrachtet werden können.

Die zwei Constanten h und C (und hiemit c) bestimmen sich aus der Anfangsgeschwindigkeit und der Entfernung vom Schwerpunkt. Sei diese $= r_1$ und jene $= v_1$, so wie der Winkel, den der Impuls v_1 mit dem Radius-Vektor r_1 macht $= \beta$, so ist

$$\frac{dr}{dt} = v_1 \cos \beta \quad \text{und} \quad r_1 \frac{d\alpha}{dt} = v_1 \sin \beta.$$

Substituiren wir diese Werthe in die Gleichungen 9) und 10), in denen statt r auch zu setzen ist r_1 , so ergibt sich hieraus augenblicklich C und h .

Ergreifen wir aber die Werthe von $r = r_1$ und v_1 , wie sie sich in einer der Apsiden vorfinden, so ist für einen solchen Punkt

$$\frac{dr}{dt} = 0 \quad \text{und} \quad r_1 \frac{d\alpha}{dt} = v_1 \quad \text{und es folgt sodann aus 9) und 10)}$$

$$C = r_1 v_1 \quad \text{und}$$

$$c = \frac{m(m + m')}{m'} \cdot r_1 v_1,$$

$$h = \frac{v_1^2 m(m + m')}{m'} - \frac{H}{r_1}.$$

Die Constante ω bestimmt sich nach der angenommenen Lage der Achse x und nach dem angenommenen Zeitpunkt des Bewegungsanfangs. Ziehen wir die Achse x durch eine der beiden Apsiden und zählen die Winkel α von dieser Achse an, so ist

$\omega = 0$ zu nehmen. Substituiren wir diese Werthe in 11), so erfolgt

$$r = \frac{(m + m')^2 r_1^2 v_1^2}{m'^3 + \sin \alpha \cdot [m'^3 - r_1^2 v_1^2 (m + m')^2]}.$$

Um nun die Zeit t in Funktion des Radius-Vektor zu finden, eliminiren wir zwischen 9) und 10) den Winkel α und haben sodann

$$12) \quad dt = \frac{r \, dr}{\sqrt{-C^2 + \frac{C}{c} H r + \frac{C}{c} h r^2}},$$

woraus, wenn wir der Kürze wegen setzen

$$-C^2 + \frac{C}{c} H r + \frac{C}{c} h r^2 = X,$$

das Integral folgt

$$13) \quad t + \tau = \frac{c}{Ch} \sqrt{X} - \frac{H}{2h} \sqrt{\frac{c}{Ch}} \log \left(\frac{dX}{dr} + 2 \sqrt{\frac{C}{ch}} \cdot \sqrt{X} \right),$$

wo τ die eingegangene Constante darstellt.

Dieselbe bestimmt sich einfach dadurch, dass man für den Anfang, wo $t = 0$, statt r den Anfangswerth r_1 setzt.

Um die Frage des Zusammenstosses zu lösen, nehmen wir für einen Augenblick an, die Massen der beiden Körper seien in ihrem Centrum vereinigt, so dass sie keine Ausdehnung haben. In diesem Falle kann sich ein Zusammenstoss nur dann ereignen, wenn

$$r = r' = 0.$$

Unter dieser Bedingung folgt aus Gleichung 9) $C = 0$. Allein Gleichung 11) zeigt, dass für $C = 0$ für immer wäre $r = 0$, wenn nicht auch zugleich ist

$$H + \sin \alpha \cdot (\alpha - \omega) \sqrt{H^2 + 4hcC} = 0 \text{ oder auch} \\ 1 + \sin(\alpha - \omega) = 0$$

woraus folgt, dass α constant sein muss. Die merkwürdige Folgerung hieraus ist die,

dass die beiden Körper, für den Fall eines Zusammenstosses sich entweder nur in ihrer fixbleibenden Ver-

bindungslinie bewegen dürfen, oder dass diese Verbindungslinie nur parallel mit sich selbst fortschreiten darf.

Obwohl $C = c = 0$, so verbleibt doch auch hier der Werth $\frac{C}{c} = \frac{m'}{m(m+m')}$. Hieraus erhalten wir

$$X = \frac{C}{c} (Hr + hr^2) \text{ oder } = \frac{m'}{m(m+m')} (Hr + hr^2).$$

Wollen wir daher die Zeit des Zusammenstosses bestimmen, so bleibt die Formel 13) unverändert, wenn wir nur statt X den neugewonnenen Werth substituiren.

Die Zeitlänge vom Ausgangspunkt bis zum Zusammenstoss ergibt sich hierauf sofort, wenn man $r = 0$ setzt.

Der vorstehenden Ausführung zu Folge ist es nun leicht, die Bedingungen analytisch auszudrücken, unter denen die 2 Körper

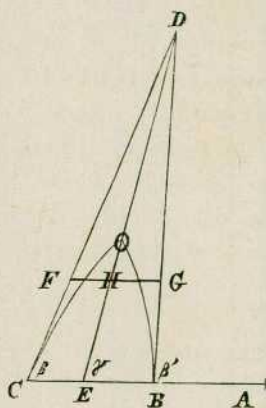
m und m' auf einander treffen. Es seien die 2 Punkte C und B , von denen m und m' nach der Richtung CD und BD mit den Impulsen v_1 und v'_1 ausgehen. Die verlängerte Verbindungslinie der Ausgangspunkte ist CA und es seien $\angle ACD = \beta$ und $\angle ABD = \beta'$. Befinden sich nun die Körper im nächsten Augenblick in F und G , so muss $FG \parallel CB$ sein und dies gibt die Bedingung

$$v \sin \beta = v'_1 \sin \beta'.$$

Diese Relation lehrt zugleich, dass die Körper nur nach einer Seite der Verbindungslinie gestossen werden dürfen.

Von Interesse ist es auch, den Ausgangspunkt und die Richtung derjenigen Geraden zu bestimmen, die der Schwerpunkt beschreibt.

Indem die Proportion stattfindet



$$CE : FH = EB : HG,$$

wobei E und H die Stellen des Schwerpunktes bezeichnen, so ist ersichtlich, dass sich die verlängerten Strecken CF, EH u. BG in dem Einen Punkte D schneiden müssen, so dass ED die Lage und Richtung der Schwerpunktsbahn bezeichnet. Setze ich die Entfernung $CB = R$; $CE = r_1$ und $EB = r'_1$, so habe ich

$$\begin{aligned} m r_1 &= m' r'_1 \text{ und da} \\ r_1 + r'_1 &= R, \text{ so ergibt sich} \\ r_1 &= \frac{m' R}{m + m'} \text{ und } r'_1 = \frac{m R}{m + m'}, \end{aligned}$$

wodurch der Ausgangspunkt der betreffenden Bahn bestimmt ist.

Um deren Richtung zu bestimmen, setze ich $\angle DEB = \gamma$, und habe sodann

$$R : CD = \sin(\beta' - \beta) : \sin \beta' \text{ und}$$

$$r_1 : CD = \sin(\gamma - \beta) : \sin \gamma,$$

woraus sich durch Elimination von CD entwickelt

$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{(m + m') \operatorname{tg} \beta \cdot \operatorname{tg} \beta'}{m \operatorname{tg} \beta' + m' \operatorname{tg} \beta}.$$

Um den Punkt des Zusammentreffens zu bestimmen, so seien CO und BO die Curven, die die beiden Körper beschreiben und die Strecke EO wird es sein, die der Schwerpunkt beschrieben haben wird.

Es ist nun $EH = bt$, wo b die Geschwindigkeit des Schwerpunktes ist. Wir haben aber

$$b \sin \gamma = v_1 \sin \beta = v'_1 \sin \beta', \text{ woraus}$$

$$b = \frac{v_1 \sin \beta}{\sin \gamma} = \frac{v'_1 \sin \beta'}{\sin \gamma}.$$

Ersetzen wir sodann t durch den gefundenen Werth 13) für $r = 0$, so haben wir

$$14) \quad EO = \frac{v_1 \sin \beta}{\sin \gamma} t = \frac{v'_1 \sin \beta'}{\sin \gamma} t.$$

Kehren wir zum Fall der Natur zurück und setzen den Radius von m gleich r_2 und denjenigen von m' gleich r'_2 . Auch wollen wir noch die Relation $r'_2 = \frac{m}{m'} r_2$ voraussetzen. Ist nun

auch hier $C = c = 0$, so bleibt ebenfalls der Parallellismus der Verbindungslinie aufrecht erhalten, und die beiden Körper vollführen einen Centralstoss. Die Zeit des Zusammenstosses ergibt sich aber, wenn wir in 13) den Radius-Vektor durch r_2 ersetzen. Das vom Schwerpunkt durchlaufene Stück von ED ergibt sich aus 14) wenn man daselbst die auf solche Weise gewonnene Zeit substituirt.

Allein, es kann ein Zusammenstoss selbst dann zum Vorschein kommen, wenn C und c nicht $= 0$ sind. Die beiden Körper zeigen in ihrem Perihelium die grösste Annäherung und tangiren sich dann, wenn $r = r_2$ wird.

Bestimmen wir für diesen Fall die Constante c . Betrachten wir die Gleichung 11), so zeigt sich r am kleinsten, also als Perihel, wenn der Nenner am grössten, d. h. wenn $\sin(\alpha - \omega) = 1$. Daraus ergibt sich die Gleichung

$$r_2 = \frac{2cC}{H + \sqrt{H^2 + 4hcC}},$$

woraus sich entwickelt

$$cC = r_2(r_2 h + H) \text{ und}$$

$$c = \sqrt{\frac{m(m + m')}{m'}} \cdot r_2(r_2 h + H).$$

In allen Fällen nun, in denen die Constante c ihre Grösse zwischen Null und dem so eben gefundenen Ausdruck wechselt, findet ein excentrischer Zusammenstoss statt.